

РАЗДЕЛ № 2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ**Тема № 3. Решение многокритериальных задач.****Самостоятельная работа 3.5**

Тема самостоятельной работы «Методы преобразования частных критериев при решении многокритериальных задач».

Учебные вопросы:

1. Алгоритм преобразования (нормализации) частных критериев на основе метода В.В.Сафронова.
2. Решение задач преобразования (нормализации) частных критериев.

Вопросы для повторения предыдущего материала

- а) вид целевой функции в многокритериальной задаче, характеристика основных элементов в целевой функции;
- б) основное отличие однокритериальных задач от многокритериальных;
- в) примеры однокритериальных и многокритериальных задач;
- г) основные методологические проблемы решения многокритериальных задач;
- д) пути преодоления методологических проблем решения многокритериальных задач.

На прошлой лекции мы рассмотрели важный класс задач, которые носят название многокритериальных задач. Рассмотрели вид целевой функции и сформулировали методологические проблемы решения многокритериальных задач.

Также на прошлой лекции мы определили, что для решения многокритериальных задач необходимо:

преобразовать частные критерии с целью приведения их к единому безразмерному масштабу и к единой шкале отчета;

определить «вес» - α_i , каждого критерия.

Рассмотрим алгоритм решения первой задачи.

Для преобразования частных критериев выбирают одну из монотонных функций следующего вида:

$$W_i(S_j) = L_1(f_i(S_j)) = \frac{f_{i\max}^o - f_i(S_j)}{f_{i\max}^o - f_{i\min}^o} \quad (1)$$

$$W_i(S_j) = L_2(f_i(S_j)) = \frac{f_i(S_j) - f_{i\min}^o}{f_{i\max}^o - f_{i\min}^o} \quad (2)$$

$$W_i(S_j) = L_1(f_i(S_j)) = \frac{f_{i\max}^o - f_i(S_j)}{f_{i\max}^o} \quad (3)$$

$$W_i(S_j) = L_2(f_i(S_j)) = \frac{f_i(S_j) - f_{i\min}^o}{f_{i\min}^o} \quad (4)$$

При решении практических задач используют формулы (1) и (2) или (3) и (4). На вопросе, в каком случае целесообразно использовать ту или иную пару формул, я остановлюсь попозже.

Для пояснения этих обозначений рассмотрим пример.

Пусть необходимо сделать выбор из 3-х самолетов по двум критериям.

$f_i(S_j)$	S_1	S_2	S_3	
$f_1(S_j)$	2 т	1 т	4 т	max; $f_{1\min} = 1$; $f_{1\max}^o = 4$.
$f_2(S_j)$	10 млн	12 млн	20 млн	min; $f_{2\max} = 20$; $f_{2\min}^o = 10$.

где $f_1(S_j)$ - грузоподъемность самолета;

$f_2(S_j)$ - стоимость эксплуатации самолета.

Из смысла задачи следует, что первый частный критерий является максимизируемым, т.е. мы должны выбрать самолет, имеющий максимальную

грузоподъемность, а второй частный критерий является минимизируемым, т.е. мы должны выбрать самолет, имеющий минимальную стоимость эксплуатации самолета.

Остальные обозначения имеют следующий смысл:

$W_i(S_j)$ – значение преобразованного i -го критерия для системы S_j ;

L_1 – оператор преобразования максимизируемых критериев, т.е. в нашем примере для преобразования частного критерия $f_1(S_j)$ необходимо использовать формулы (1) или (3);

L_2 – оператор преобразования минимизируемых критериев, т.е. в нашем примере для преобразования частного критерия $f_2(S_j)$ необходимо использовать формулы (2) или (4);

$f_{i\min}$ – минимальное значение i -го критерия на множестве всех систем S_j для максимизируемых критериев. В нашем примере максимизируемым критерием является грузоподъемность $f_1(S_j)$, поэтому $f_{1\min} = 1$;

$f_{i\max}$ – максимальное значение i -го критерия на множестве всех систем S_j для минимизируемых критериев. В нашем примере минимизируемым критерием является стоимость эксплуатации самолета $f_2(S_j)$, поэтому $f_{2\max} = 20$;

$f_{i\min}^o$ – минимальное значение i -го критерия на множестве всех систем S_j для минимизируемых критериев. В нашем примере минимизируемым критерием является стоимость эксплуатации самолета $f_2(S_j)$, поэтому $f_{2\min}^o = 10$;

$f_{i\max}^o$ – максимальное значение i -го критерия на множестве всех систем S_j для максимизируемых критериев. В нашем примере максимизируемым критерием является грузоподъемность $f_1(S_j)$, поэтому $f_{1\max}^o = 4$.

Вычислим значения преобразованных частных критериев по формулам

(1) и (2) и занесем эти значения в преобразованную таблицу.

Таблица

$W_i(S_j)$	S_1	S_2	S_3
$W_1(S_j)$	0,67	1	0
$W_2(S_j)$	0	0,2	1

Значение первого преобразованного частного критерия для первой системы (самолета) определяется из формулы (1), т.к. данный критерий является максимизируемым

$$W_1(S_1) = \frac{4-2}{4-1} = \frac{2}{3} = 0,67$$

Значения первого преобразованного частного критерия для второй и третьей систем определяются аналогичным образом

$$W_1(S_2) = \frac{4-1}{4-1} = 1; \quad W_1(S_3) = \frac{4-4}{4-1} = 0$$

Значение второго преобразованного частного критерия для первой системы (самолета) определяется из формулы (2), т.к. данный критерий является минимизируемым

$$W_2(S_1) = \frac{10-10}{20-10} = 0$$

Значения второго преобразованного частного критерия для второй и третьей систем определяются аналогичным образом

$$W_2(S_2) = \frac{12-10}{20-10} = 0,2; \quad W_2(S_3) = \frac{20-10}{20-10} = 1$$

Заметим, что после преобразования задача сводится к поиску системы, у которой и первый и второй критерии принимают наименьшие значения. Нетрудно видеть, что вторая система является неэффективной, т.к. $W_1(S_2) \succ W_1(S_1)$ и $W_2(S_2) \succ W_2(S_1)$, следовательно $S_1 \succ S_2$, т.е. система 1 доминирует систему 2. Таким образом, 2-я система из дальнейшего анализа

может быть исключена.

Вычислим значения преобразованных частных критериев по формулам (3) и (4) и занесем эти значения в преобразованную таблицу.

Таблица

$W_i(S_j)$	S_1	S_2	S_3
$W_1(S_j)$	0,5	0,75	0
$W_2(S_j)$	0	0,2	1

Значение первого частного критерия для первой системы (самолета) определяется из формулы (3), т.к. данный критерий является максимизируемым

$$W_1(S_1) = \frac{4-2}{4} = 0,5$$

Значения первого частного критерия для второй и третьей систем определяются аналогичным образом

$$W_1(S_2) = \frac{4-1}{4} = 0,75; \quad W_1(S_3) = \frac{4-4}{4} = 0$$

Значение второго частного критерия для первой системы (самолета) определяется из формулы (4), т.к. данный критерий является минимизируемым

$$W_2(S_1) = \frac{10-10}{20-10} = 0$$

Значения второго частного критерия для второй и третьей систем определяются аналогичным образом

$$W_2(S_2) = \frac{12-10}{10} = 0,2; \quad W_2(S_3) = \frac{20-10}{10} = 1$$

Из анализа данных таблицы можно сделать аналогичный вывод о том, что вторая система является неэффективной, т.к. $W_1(S_2) > W_1(S_1)$ и $W_2(S_2) > W_2(S_1)$, следовательно $S_1 > S_2$, т.е. система 1 доминирует систему 2. Таким образом, 2-я система из дальнейшего анализа может быть исключена.

Отметим, что для преобразований вида (1) и (2) величины $W_i(S_j)$ лежат в пределах от нуля до единицы, а для преобразований (3) и (4) эти же величины могут и не лежать в указанных пределах. Заметим, что для практических вычислений более удобными являются преобразования (3) и (4). Их и будем использовать в дальнейшем.

Рассмотрим пример, в котором оба частных критерия являются минимизируемыми.

Пусть необходимо сделать выбор из 3-х самолетов по следующим критериям:

$f_1(S_j)$ -стоимость эксплуатации самолета;

$f_2(S_j)$ -вероятность возникновения аварийной ситуации.

Исходные данные представлены в таблице

Таблица

$f_i(S_j)$	S_1	S_2	S_3	
$f_1(S_j)$	2 млн	5 млн	1 млн	min; $f_{1\min}^o = 1.$
$f_2(S_j)$	0,1	0,05	0,15	min; $f_{2\min}^o = 0,05.$

Из смысла задачи следует, что и первый и второй частные критерии являются минимизируемыми, т.е. мы должны выбрать самолет, имеющий минимальную стоимость эксплуатации самолета и минимальную вероятность возникновения аварийной ситуации.

Вычислим значения преобразованных частных критериев по формуле (4) и занесем эти значения в преобразованную таблицу.

Таблица

$W_i(S_j)$	S_1	S_2	S_3
$W_1(S_j)$	1	5	0
$W_2(S_j)$	1	0	2

Значение первого преобразованного частного критерия для первой си-

стемы (самолета) определяется из выражения

$$W_1(S_1) = \frac{2-1}{1} = 1$$

Значения первого преобразованного частного критерия для второй и третьей систем определяются аналогичным образом

$$W_1(S_2) = \frac{5-1}{1} = 5; \quad W_1(S_3) = \frac{1-1}{1} = 0$$

Значение второго преобразованного частного критерия для первой системы (самолета) определяется из выражения

$$W_2(S_1) = \frac{10-10}{20-10} = 0$$

Значения второго преобразованного частного критерия для второй и третьей систем определяются аналогичным образом

$$W_2(S_2) = \frac{0,05-0,05}{0,05} = 0; \quad W_2(S_3) = \frac{0,15-0,05}{0,05} = 2$$

Заметим, что в отличие от предыдущего примера, в данном случае отсутствуют доминирующие системы, т.е. ни одну из них нельзя исключить из дальнейшего анализа.

Как было сказано выше, окончательный вывод о выборе самолета может быть осуществлен на основе единого (интегрального) критерия. При этом следует выбрать самолет, для которого значение интегрального критерия будет минимально

$$W = \alpha_1 W_1 + \alpha_2 W_2 \Rightarrow \min$$

Для решения этой задачи необходимо уметь определять весовые коэффициенты критериев α_1 и α_2 . Этот вопрос будет рассмотрен несколько позже.

На этом этапе мы просто зададим эти значения и решим задачу до конца.

Пусть «вес» первого критерия – стоимости эксплуатации самолета равен $\alpha_1=0,8$, а второго критерия – вероятности возникновения аварийной ситуации равен $\alpha_2=0,2$ (как было сказано выше, в сумме значения весовых коэффициентов должны быть равны единице).

Тогда значения интегрального критерия для каждого самолета вычисляются из выражений:

$$W(S_1) = 0,8 \cdot 1 + 0,2 \cdot 1 = 1;$$

$$W(S_2) = 0,8 \cdot 5 + 0,2 \cdot 0 = 4;$$

$$W(S_3) = 0,8 \cdot 0 + 0,2 \cdot 2 = 0,4.$$

Анализ результатов расчета показывает, что при заданных весовых коэффициентах целесообразно выбрать третий самолет, т.к. значение интегрального критерия для него минимально.

Проведем расчеты для других значений весовых коэффициентов рассматриваемых критериев.

Пусть $\alpha_1=0,4$; $\alpha_2=0,6$, тогда:

$$W(S_1) = 0,4 \cdot 1 + 0,6 \cdot 1 = 1;$$

$$W(S_2) = 0,4 \cdot 5 + 0,6 \cdot 0 = 2;$$

$$W(S_3) = 0,4 \cdot 0 + 0,6 \cdot 2 = 1,2.$$

Анализ результатов расчета показывает, что при заданных весовых коэффициентах целесообразно выбрать первый самолет, т.к. значение интегрального критерия для него минимально.

Пусть $\alpha_1=0,1$; $\alpha_2=0,9$, тогда:

$$W(S_1) = 0,1 \cdot 1 + 0,9 \cdot 1 = 1;$$

$$W(S_2) = 0,1 \cdot 5 + 0,9 \cdot 0 = 0,5;$$

$$W(S_3) = 0,1 \cdot 0 + 0,9 \cdot 2 = 1,8.$$

Анализ результатов расчета показывает, что при заданных весовых коэффициентах целесообразно выбрать второй самолет, т.к. значение интегрального критерия для него минимально.

Задание на самоподготовку.

Подготовиться к ответам на следующие вопросы:

а) основные этапы решения многокритериальных задач;

- б) краткая характеристика преобразующих функций;
- в) задачи, которые могут быть решены с помощью преобразующих функций.

Список литературы для углубленного изучения материалов

1. Математические методы и модели исследования операций: учебник / ред. В.А. Колемаев. - Москва: Юнити-Дана, 2015. - 592 с. [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=114719>. [стр. 156 – 158].
2. Маслихина, В.Ю. Методы принятия управленческих решений: учебное пособие / В.Ю. Маслихина; Поволжский государственный технологический университет. - Йошкар-Ола: ПГТУ, 2016. - 228 с. [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=459492>. [стр. 132 – 138].